



**Veröffentlichte Versionen von sechs Aufgaben
des *Mathe im Advent*-Teams**



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner

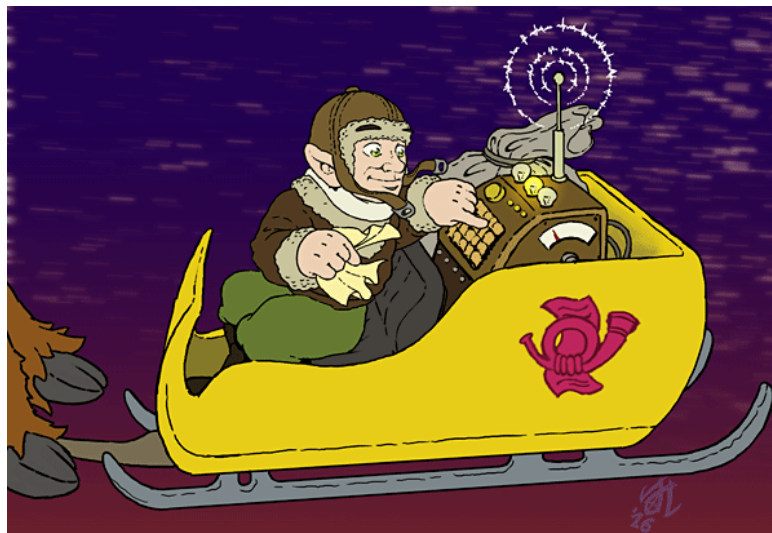


Nachdem Waldemar bei den Weihnachtspostämtern auf der ganzen Welt die Wunschzettel einsammelt und ins Weihnachtsdorf gebracht hat, dreht er immer noch eine Extra-Runde. Er fährt in Gegenden, wo die Post nur selten vorbei kommt und holt die letzten Wunschzettel persönlich ab. Dies geschieht immer kurz vor Weihnachten, deshalb müssen die Wünsche möglichst schnell zu Oberpostwichtel Bodo gelangen. Waldemar hat dafür ein spezielles Gerät. Es scannt unterwegs die Wunschzettel ein und überträgt sie zu einem Empfangsgerät in Bodos Wichtelpost.

Doch manchmal werden falsche Buchstaben übertragen. Das hat im letzten Jahr dazu geführt, dass ein Kind anstatt des gewünschten Puppenhauses eine Maus zu Weihnachten bekam. Anstatt HAUS hatte Bodo das Wort MAUS empfangen. Das Kind war natürlich sehr enttäuscht.

Damit so ein Fehler nicht wieder passiert, überträgt Waldemar jeden Wunsch jetzt immer dreimal hintereinander. Wenn bei der Übertragung ein Fehler passiert und Bodo nicht dreimal das gleiche Wort erhält, vergleicht er die Buchstaben stellenweise. Für jede Stelle nimmt er immer den Buchstaben, der am häufigsten in den drei Wörtern vorkommt. Zum Beispiel würde HAUS MAUS HAUS als Haus erkannt werden. So kann Bodo den Fehler jetzt meistens korrigieren.

Dies funktioniert aber nur dann, wenn an den jeweiligen Stellen der drei Wörter ein Buchstabe mehrmals vorkommt. HAUS MAUS LAUS kann Bodo an der ersten Stelle nicht eindeutig erkennen.



Waldemar hat gerade den Wunschzettel von Irene aus einem Dorf in Venezuela eingescannt, bei der Übertragung haben sich jedoch einige Fehler eingeschlichen. Bodo erhält an seinem Empfangsgerät für den ersten Wunsch diese drei Wörter:

KANINCHEN MUETZCHEN KAETZCHEN.

Was wünscht sich Irene?

[Hinweis: Die Umlaute Ä, Ü, Ö werden im übertragenen Text als AE, UE, OE geschrieben.]

- a) Ein Kaninchen
- b) Ein Mützchen
- c) Ein Kätzchen
- d) Ein Mäuschen

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner



Lösung:

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Irene wünscht sich ein Kätzchen.

An Bodo wurde der folgende Wunsch übertragen: KANINCHEN MUETZCHEN KAETZCHEN.

Vergleich 1. Buchstabe:

Schon der erste Buchstabe ist nicht bei allen drei Wörtern gleich. Doch da zweimal ein „K“ vorkommt und nur einmal ein „M“, ist der erste Buchstabe „K“.

Vergleich 2. Buchstabe:

An der zweiten Stelle steht zweimal ein „A“ und einmal ein „U“. Bodo wählt als zweiten Buchstaben nach seiner Methode also ein „A“ ein. Der Wunsch wird demnach mit „KA“ beginnen.

Da die letzten vier Buchstaben bei allen Wörtern gleich sind, endet der Wunsch „CHEN“.

Es kommen bis jetzt also sowohl KANINCHEN als auch KAETZCHEN infrage.

Er nimmt sich daher den 3. Buchstaben vor:

Beim dritten Buchstaben gibt es zweimal „E“ und einmal „N“. Da das „E“ in der Mehrheit ist, entscheidet er sich für dieses.

Weiter musst du nun nicht mehr prüfen, weil KANINCHEN als Möglichkeit jetzt ausscheidet. Der korrekte Wunsch kann nur KAETZCHEN heißen. Irene wünscht sich also ein Kätzchen.

Mathematische Exkursion: Kodierungstheorie

Das mathematische Gebiet, das sich mit solchen und anderen sogenannten *Kodierungen* (auch *Codes*) beschäftigt heißt *Kodierungstheorie*. In diesem geht es – anders als in der Kryptografie – nicht um die Geheimhaltung von Informationen, sondern um das Schützen vor möglichen Fehlern bei einer Übertragung von Information. Man unterscheidet hier im Wesentlichen zwischen fehlererkennenden und fehlerkorrigierenden Codes. Wie die Namen erkennen lassen, können die einen Codes Fehler „nur“ erkennen, wohingegen die anderen Codes Fehler sogar korrigieren können.

Der Code, den Waldemar und Bodo verwenden, ist ein fehlerkorrigierender Code. Allerdings können auch bei einem solchen nicht alle Fehler korrigiert werden. Im zweiten Beispiel im Text hätte Bodo den Fehler an der ersten Stelle zwar erkannt, er hätte ihn aber nicht korrigieren können.

Der verwendete Code ist ein sogenannter (*3-fach*) *Wiederholungscode*. Normalerweise wird der Text, der übertragen wird jedoch erst in Binärdarstellung übersetzt.

Das Binärsystem hast du bereits in der Aufgabe „Der Rentier-Zählautomat“ kennengelernt. Schau dort noch einmal rein (auch in die Mathematische Exkursion unter der Lösung), um dich zu erinnern, wie man Zahlen in Binärzahlen übersetzt. Um einen Text in Binärdarstellung zu bringen, kannst du

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6
19. Der Wunschzettelscanner



zunächst jedem Buchstaben eine Zahl zuordnen: dem „A“ die 1, „B“ die 2, „C“ die 3 usw. bis „Z“ die 26. Diese Zahlen schreibst du dann noch in Binärdarstellung.

Du hast nun also eine Folge von Nullen und Einsen. Damit lässt sich der 3-fach Wiederholungscode noch besser anwenden, da es für jede Stelle ja nur eine Möglichkeit gibt: 0 oder 1. Bei einer 3-fachen Wiederholung können so Einzelfehler korrigiert werden. Es kann natürlich passieren, dass an einer Stelle zwei Fehler passieren, sodass dort dann eine Mehrheit vorliegt und man falsch decodieren würde. Dies ist in der Regel jedoch recht unwahrscheinlich.

Fehlerkorrigierende Codes finden vor allem dort Anwendung, wo Übertragungen nicht schnell überprüft und im Zweifel noch einmal gesendet werden können. Dies ist zum Beispiel beim Speichern von Daten auf einer CD der Fall (auf welcher dann auch Kratzer entstehen können) oder bei der Kommunikation mit Objekten im Weltraum.

Iffi und Ollo sind mal wieder schneller fertig mit dem Verpacken als alle anderen Geschenkwichtel. Während sie warten, sagt Iffi plötzlich: „Ich habe mir gestern ein Spiel ausgedacht, so etwas hast du noch nie gesehen!“ Dann holt sie 15 Holzplättchen aus ihrer Tasche. Darauf sind 15 verschiedene Bilder gemalt.

Iffi erklärt: „Pass auf: Ich lege die Plättchen nacheinander auf drei Stapel. Das 1. Plättchen kommt auf den ersten Stapel, das 2. Plättchen auf den zweiten Stapel, das 3. auf den dritten Stapel. Das 4. Plättchen kommt wieder auf den ersten Stapel, das 5. auf den zweiten Stapel und so weiter. So entstehen Stück für Stück drei Stapel mit jeweils 5 Plättchen. Während ich das mache, suchst du dir ein Plättchen aus und merkst dir das Bild. Du darfst mir aber nicht sagen, welches Plättchen es ist.“

Gesagt getan: Iffi beginnt, die Plättchen wie beschrieben aufzuteilen. Ollo merkt sich ein Bild. Dann fragt sie ihn, in welchem der drei Stapel sich sein Bild befindet. "Im linken," antwortet Ollo. Ganz unschuldig hebt sie nun die drei Stapel auf und legt sie zu einem Turm zusammen. Sie achtet dabei darauf, dass sie den linken Stapel mit Ollos Bild in die Mitte, zwischen die anderen beiden Stapel legt.

Ohne zu mischen teilt sie die Plättchen dann wieder auf die gleiche Weise in drei Stapel auf und fragt Ollo, in welchem Stapel sein Plättchen ist. "Im mittleren," antwortet Ollo. Diesen Stapel legt sie wieder in die Mitte zwischen die beiden anderen Stapel.



Das ganze wiederholt sie noch einmal. Den Stapel mit Ollos Plättchen legt sie ein drittes Mal in die Mitte zwischen die beiden anderen Stapel. Aus dem Turm mit allen 15 Plättchen zieht sie nun ein bestimmtes Plättchen heraus. Ollo staunt: „Das ist genau das, was ich mir ausgesucht hatte!“

Klappt dieser Trick mit Iffis 15 Holzplättchen und drei Mal Austeilen und Zusammenlegen immer?

[Tipp: Probiere den Trick selbst aus!]

- Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 2. Stelle im Turm.
- Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 8. Stelle im Turm.
- Ja, das Plättchen befindet sich am Ende immer an der 11. Stelle im Turm.
- Nein, es war Zufall, dass Iffi das Plättchen gefunden hat.

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick



Lösung:

Antwortmöglichkeit b) ist richtig. Das Plättchen befindet sich am Ende immer genau in der Mitte des ganzen Stapels, also an der 8. Stelle.

Am besten nimmst du dir zunächst 15 Plättchen (du kannst einfach ein Karten- oder Memoryspiel verwenden) und probierst es selbst aus. Die Idee hinter Iffi's Trick ist, dass es mit jedem Mal neu Austeilen immer weniger Plättchen gibt, auf denen Ollos gewähltes Bild sein könnte.

Am Anfang teilt Iffi die Plättchen wie beschrieben auf drei Stapel auf. Bei 15 Karten müssen in jedem Stapel 5 Plättchen sein. Ollo merkt sich dabei sein Bild und gibt an, in welchem Stapel es sich befindet. Iffi weiß jetzt bereits, welche 5 Plättchen nur noch infrage kommen.

Iffi legt die drei Stapel nun zu einem Turm zusammen, wobei sie die 5 Plättchen mit dem Ausgewählten in die Mitte legt. Nun verteilt sie den Turm wieder nach uns nach auf drei Stapel, auf die gleiche Weise wie beim ersten Mal. Es ist unwichtig, was mit den ersten 5 und den letzten 5 Plättchen passiert, da Ollos Ausgewähltes nicht darunter ist. Du musst dir nur anschauen, wie die mittleren 5 Plättchen verteilt werden. Da $5 : 3 = 1$ Rest 2 ergibt, landen von den ersten 5 "unwichtigen" Plättchen, 2 Plättchen auf dem ersten Stapel, 2 auf dem zweiten und nur eins auf dem dritten Stapel.

Das letzte "unwichtige" Plättchen liegt also auf dem zweiten Stapel ($5 = 2 + 2 + 1$). Von den "wichtigen" 5 Plättchen, unter denen Ollos ausgewähltes Bild ist, landen deshalb 2 Plättchen auf dem dritten Stapel (weil du jetzt hier beginnst), 2 Plättchen auf dem ersten Stapel und nur eins auf dem zweiten Stapel. Danach teilt Iffi die anderen 5 "unwichtigen" Plättchen aus.

Iffi fragt Ollo nun wieder, in welchem Stapel sich sein ausgewähltes Plättchen befindet. Ist Ollos Plättchen im ersten Stapel, weiß Iffi, dass es nur noch 2 mögliche Plättchen gibt, unter denen Ollos Ausgewähltes sein kann. Das Gleiche gilt, falls Ollo sagt, dass sein Plättchen im dritten Stapel ist. Beide mögliche Plättchen liegen in den Stapeln bereits in der Mitte. Wäre Ollos Plättchen im zweiten Stapel, wüsste Iffi bereits, welches das richtige ist. Es wäre das mittlere (3. Stelle) im zweiten Stapel. Damit der Trick immer klappt, musst du aber den *ungünstigsten* Fall anschauen – den Fall, dass Ollos Plättchen im ersten oder dritten Stapel ist.

Du kannst nun beide Fälle einmal genauer untersuchen:

1. Fall: Ollos ausgewähltes Plättchen ist im ersten Stapel

Ollos Plättchen muss nach dem zweiten Mal Austeilen das dritte oder vierte Plättchen (von unten) in diesem Stapel sein. Nachdem Iffi diesen Stapel in die Mitte des Turms gelegt hat, ist Ollos Plättchen also an achter oder neunter Stelle im Turm (von unten). Iffi legt dann alle Plättchen erneut aus. Dabei landet das siebte Plättchen auf dem ersten Stapel an der dritten Stelle (also genau in der Mitte) und das achte Plättchen landet auf dem zweiten Stapel genau in der Mitte.

Jetzt zeigt Ollo ein letztes Mal auf einen der drei Stapel (es kann nur der zweite oder der dritte Stapel sein). In beiden Fällen befindet sich Ollos Plättchen *mit Sicherheit* genau in der Mitte des Stapels. Iffi weiß nun, welches Plättchen sich Ollo ausgewählt hat. Wenn Iffi nun den Stapel mit Ollos Plättchen wieder in der Mitte zwischen den beiden anderen Stapeln einfügt, befindet sich Ollos Bild genau in der Mitte des Turms, also an der achten Stelle.

Es fehlt noch der andere Fall:

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 4-6

23. Iffi's Trick2. Fall: Ollos ausgewähltes Plättchen ist im dritten Stapel

Wenn Ollos Plättchen nach dem zweiten Mal Austeilen im dritten Stapel ist, funktioniert es genau so. Es befindet sich dort an 2. oder 3. Stelle. Legt Iffi diesen Stapel nun wieder in die Mitte des Turms, liegt Ollos Plättchen an der 7. oder der 8. Stelle. Nach erneutem Austeilen wird Ollos Plättchen also genau in der Mitte (an 3. Stelle) des ersten oder zweiten Stapels liegen. Egal, auf welchen Stapel Ollo jetzt zeigt, wird nach dem Zusammenlegen zu einem Turm das Plättchen darin an 8. Stelle (genau in der Mitte) liegen.

Du kannst dir überlegen, was passiert, wenn du anstatt 15 Plättchen eine andere Anzahl an Plättchen verwendest. Die Anzahl sollte durch 3 teilbar sein, damit auf allen drei Stapeln immer gleich viele Plättchen landen. Funktioniert der Trick mit 18 Plättchen? Mit 21? Mit 27? Mit 33? Probiere es aus und überlege, was passiert!



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



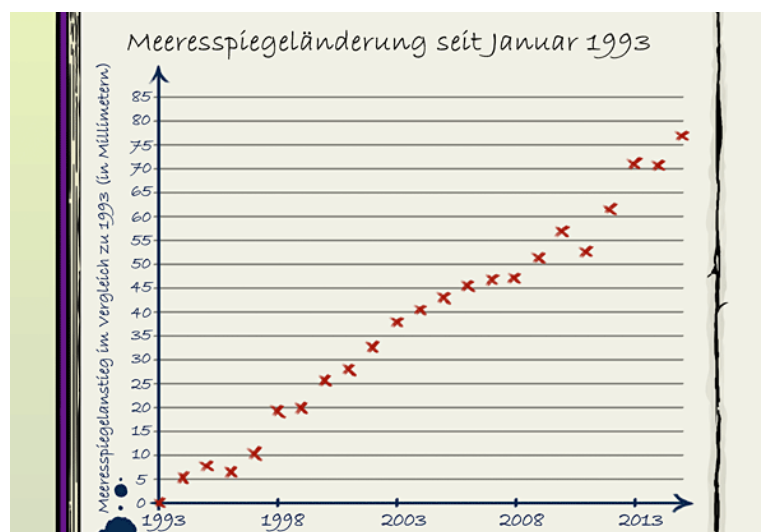
Eddie mag die hektische Adventszeit im Weihnachtsdorf nicht besonders. Seitdem er in Rente ist, entflieht er deshalb jeden Winter zum Angeln in die Südsee. Er besucht seinen Freund Uriam, der auf der Insel Kirimati wohnt. Dort ist es wunderbar ruhig. Gemeinsam schippern sie dann mit einem kleinen Boot um die Nachbarinseln und angeln. Uriam erzählt dabei vom Leben in der Südsee:

„Es ist hier gar nicht so ruhig wie du glaubst. Der Meeresspiegel steigt und das Meer kommt immer näher an unsere Dörfer heran. In den letzten Jahren mussten immer mehr Inselbewohner ihre Häuser versetzen. Manche Inselabschnitte sind sogar schon komplett überflutet worden...“

„Das ist ja furchtbar...“ erwidert Eddie besorgt. „Na ja,“ meint Uriam, „wir können hier auch nicht viel dagegen machen. Und woanders wollen wir auch nicht hin.“ Plötzlich zappelt Eddies Angel – ein besonders großer Fisch hat angebissen! Mit gemeinsamen Kräften versuchen sie den Fang an Land zu ziehen...



Das Gespräch lässt Eddie nicht los. Zurück auf Kirimati macht er sich sofort an die Suche nach Informationen. Er erfährt, dass manche Nachbarinseln schon ganz verschwunden sind. Er liest, dass der steigende Meeresspiegel wohl nicht allein dafür verantwortlich ist. Eindeutig steht aber fest, dass der Meeresspiegel steigt und dies für viele Inseln ein Problem ist. Er findet ein Diagramm, das die Änderung des Meeresspiegels seit 1993 anzeigt:



Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



„Krass, wie schnell der Meeresspiegel gestiegen ist...“, murmelt Eddie in seinen Bart.

Wie groß war die durchschnittliche Änderung des Meeresspiegels pro Jahr zwischen 1993 und 2015?

- a) ca. 3,5 mm
- b) ca. 9,8 mm
- c) ca. 2,1 mm
- d) ca. 0,5 mm

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Lösung:

Antwortmöglichkeit a) ist richtig. Der Meeresspiegel ist zwischen 1993 und 2015 pro Jahr um durchschnittlich 3,5 mm gestiegen.

Um die durchschnittliche Steigung des Meeresspiegels zu ermitteln, musst du die Werte für die Veränderung des Meeresspiegels im Diagramm ablesen. Wenn zwischen den Messungen der Wasserspiegel gestiegen ist, ist es eine positive Zahl. Wenn der Meeresspiegel gesunken ist, ist die Steigung negativ. Im Jahr 1993 wurde das erste Mal der Meeresspiegel gemessen. Mit dieser Höhe werden alle Messungen verglichen, es ist sozusagen die „Nullhöhe“. Zum Beispiel ist der Meeresspiegel bei der zweiten Messung 5 mm höher als 1993. Im nächsten Jahr 1995 ist der Meeresspiegel um weitere 3 mm gestiegen. Er lag dann bei 8 mm über der „Nullhöhe“ von 1993. Für die Berechnung des Durchschnitts bis 2015 hast du nun mehrere Möglichkeiten.

1. Möglichkeit:

Der Durchschnitt der Meeresspiegel lässt sich am einfachsten berechnen, indem du den gesamten Anstieg von 1993 bis 2015 nimmst und ihn durch die Anzahl der Jahre teilst, die in diesem Zeitraum liegen:

Den gesamten Anstieg bis 2015 kannst du direkt aus dem Diagramm ablesen: ca. 77mm.

Die Anzahl der Jahre sind: $2015 - 1993 = 22$

Der durchschnittliche Anstieg beträgt also:

$$77 \text{ mm} : 22 \text{ Jahre} = 3,5 \text{ Millimeter pro Jahr}$$

2. Möglichkeit:

Du erstellst dir eine Tabelle, in der du den jeweilige Änderungen zwischen zwei aufeinander folgenden Messungen einträgst. Jedes Jahr seit 1993 bis einschließlich 2015 hat eine neue Messung des Meeresspiegels stattgefunden. Addierst du alle Jahresänderungen der Meeresspiegel und teilst sie durch die Anzahl der Messwerte (Jahre), bestimmst du die durchschnittliche Änderung pro Jahr.

Hier die Tabelle der jährlichen Änderungen des Meeresspiegels:

Messungen	Jahre	Steigung in mm
1 und 2	1993 → 1994	5
2 und 3	1994 → 1995	3
3 und 4	1995 → 1996	-2
4 und 5	1996 → 1997	4
5 und 6	1997 → 1998	9
6 und 7	1998 → 1999	1
7 und 8	1999 → 2000	6
8 und 9	2000 → 2001	2
9 und 10	2001 → 2002	5
10 und 11	2002 → 2003	5
11 und 12	2003 → 2004	2

Messungen	Jahre	Steigung in mm
12 und 13	2004 → 2005	3
13 und 14	2005 → 2006	3
14 und 15	2006 → 2007	1
15 und 16	2007 → 2008	0
16 und 17	2008 → 2009	5
17 und 18	2009 → 2010	6
18 und 19	2010 → 2011	-5
19 und 20	2011 → 2012	9
20 und 21	2012 → 2013	9
21 und 22	2013 → 2014	-1
22 und 23	2014 → 2015	7

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Insgesamt erhöhte sich das Wasser seit Beginn der Messungen um die Summe aller einzelnen Änderungen:

$$5 + 3 - 2 + 4 + 9 + 1 + 6 + 2 + 5 + 5 + 2 + 3 + 3 + 1 + 0 + 5 + 6 - 5 + 9 + 9 - 1 + 7 = 77$$

Im Jahr 2015 war der Meeresspiegel um 77 mm höher als im Jahr 1993. Der Zeitraum betrug 22 Jahre.

Um den Durchschnitt aller Steigungen zu berechnen, musst du folgenden Quotienten bilden:

$$77 : 22 = 3,5.$$

Der Meeresspiegel ist also jedes Jahr durchschnittlich um 3,5 mm gestiegen.

3. Möglichkeit:

Du kannst dir in einem Diagramm das Steigungsdreieck zur Hilfe nehmen. Verbinde den ersten Datenpunkt P(1993|0) und den letzten Datenpunkt Q(2015|77) mit einer geraden Linie und berechne die Steigung dieser Geraden:

$$m = \frac{77 - 0}{2015 - 1993} = \frac{77}{22} = 3,5$$

Blick über den Tellerrand: Anstieg des Meeresspiegels

Der Name der Insel *Kirimati*, die Eddie jedes Jahr besucht, basiert auf der Koralleninseln *Kiritimati*. Sie gehört zum *Inselstaat Kiribati* (einheimische Aussprache: Kiribas). *Kiritimati* ist das kiribatische Wort für *Christmas*, also für Weihnachten. Im deutschen wird Kiritimati daher auch *Weihnachtsinsel* genannt.

Uriams Erzählungen entsprechen leider der Wirklichkeit: Kiribati leidet unter Zerstörungen durch das Meer. Vor ein paar Jahren hat der damalige Präsident *Anote Tong* daher vorsichtshalber ein Stück Land auf den benachbarten *Fidschi Inseln* gekauft, um einen Teil der Bevölkerung Kiribatis im Notfall umsiedeln zu können.

Viele Wissenschaftler_innen sind jedoch der Meinung, dass Kiribati nicht so schnell untergehen wird. Auch ist unklar, inwieweit die Zerstörungen durch das Meer wirklich mit dem ansteigenden Meeresspiegel zusammenhängen.

Fakt ist jedoch, dass der Meeresspiegel steigt und dass dies vor allem in Küstenregionen zu Problemen führt bzw. noch führen wird. Überschwemmungen, stärkere Sturmfluten und das Versalzen der Böden sind nur einige mögliche Folgen.

Die Daten, die du in der Aufgabe ausgewertet hast, stammen von der *NASA* (die US-amerikanische Raumfahrtbehörde). Ein durchschnittlicher Anstieg von ca. 3,5 mm pro Jahr seit 1993 entspricht also der Realität.

Es gibt Prognosen, nach denen einige Länder besonders unter dem steigenden Meeresspiegel leiden werden. Beispiele hierfür sind die Niederlande und Bangladesch. Der Grund, warum diese Länder stärker betroffen sind als andere, liegt unter anderem daran, dass sie sehr niedrig gelegen und flach sind. Für Bangladesch werden die Folgen den Vorhersagen nach besonders stark sein, da es – im Gegensatz zu den Niederlanden – ein armes Land ist und nur begrenzt Gegenmaßnahmen (wie das Errichten von Dämmen) ergreifen kann.

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
12. Die Weihnachtsinsel



Die Hauptgründe für den Anstieg des Meeresspiegels sind vor allem das Ausdehnen des Meeres durch den Temperaturanstieg und das Abschmelzen von Gletschern. Bis ins letzte Detail sind die Ursachen für den Meeresspiegelanstieg jedoch noch nicht geklärt.

Lesetipps:

<http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/nasa-forscher-befuerchten-deutlichen-anstieg-des-meeresspiegels-a-1050045.html>

und vom Wissenschaftsjahr 2016*17 — Meere und Ozeane:

<https://www.wissenschaftsjahr.de/2016-17/das-wissenschaftsjahr/themenschwerpunkte/wetterkueche-und-klimamaschine/meere-ozeane-und-das-klima/seite/24.html>

Statistikwichtel Balduin versinkt mal wieder in Arbeit. Deswegen hat er seine Praktikantin Golda gebeten, ein paar Nebenrechnungen für ihn zu machen.

Während sie nun an ihrem Schreibtisch sitzt und alle möglichen Zahlen zusammenrechnet, macht sie plötzlich eine Feststellung: Die Zahl 9 lässt sich nicht nur als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen schreiben, sondern auch als Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Es gilt $4 + 5 = 9$, aber auch $2 + 3 + 4 = 9$.

Für einen Moment vergisst Golda ihre Rechnungen. Sie beginnt nach anderen Zahlen zu suchen, die sich auf diese beiden Arten schreiben lassen. Sie stellt fest: „Bei der Zahl 5 funktioniert das schon mal nicht... zwar ist $2 + 3 = 5$, aber als Summe von drei Nachbarzahlen, kann man die 5 nicht schreiben.“



So leicht gibt sie aber nicht auf. „Die 9 kann ja nicht die einzige Zahl sein, die diese Eigenschaft hat. Das wäre ja schon wahnsinniger Zufall.“ Auf ihrer Suche nach weiteren Zahlen, macht sie einige interessante Beobachtungen. Aber nicht alle Beobachtungen sind richtig.

Welche der folgenden Beobachtungen ist falsch?

- a) Jede Zahl, die durch drei teilbar ist, lässt sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.
- b) Jede ungerade Zahl lässt sich als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben.
- c) Teilt man eine Zahl, die sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben lässt, durch drei, erhält man die mittlere der drei Nachbarzahlen.
- d) Jede Zahl, die durch sechs teilbar ist, lässt sich sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team
Mathe im Leben gemeinnützige GmbH
<http://www.mathe-im-advent.de>

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
13. Interessante Nachbarn



Lösung:

Antwortmöglichkeit d) ist richtig. Zwar lässt sich jede sechste Zahl auf beide genannten Arten darstellen, aber nicht jede Zahl, die durch sechs teilbar ist, hat diese Eigenschaften.

Schau dir zunächst ein paar Beispiele zu allen Antwortmöglichkeiten an. Vermutlich wirst du dann eine Vermutung haben, welche Aussagen richtig sind und welche Aussage falsch ist. Das solltest du dann allerdings noch begründen.

a) Jede Zahl, die durch drei teilbar ist, lässt sich als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Für die 3 funktioniert es: $0 + 1 + 2 = 3$, ebenso für die $1 + 2 + 3 = 6$ und für die $2 + 3 + 4 = 9$. Vielleicht hast du jetzt schon eine Beobachtung gemacht. Es wird immer die Kleinste der drei Nachbarzahlen weggenommen und stattdessen die nächsthöhere Nachbarzahl zur Summe hinzugefügt. Damit kannst du immer die nächste Zahl, die durch drei teilbar ist, als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben. Das funktioniert, weil die Differenz zwischen der neuen und der gelöschten Nachbarzahl immer genau 3 ist.

Ein Beweis dafür, sieht folgendermaßen aus:

Um den allgemeinen Beweis zu führen, benötigst du Platzhalter (auch Variablen genannt) für die Zahlen. Man nimmt da üblicherweise Buchstaben die für eine beliebige natürliche Zahl stehen. Wir nehmen hier n und k .

Wenn die Zahl n durch 3 teilbar ist, dann kannst du sie auch als $n = 3 \cdot k$ schreiben. Dabei ist k das Ergebnis der Divisionsaufgabe $k = n : 3$.

Nun kannst du den Ausdruck noch weiter zerlegen: $n = 3 \cdot k = k + k + k$

Der Vorgänger von k ist $k - 1$ und der Nachfolger von k ist $k + 1$. $k - 1$, k und $k + 1$ sind drei benachbarte Zahlen.

Wenn du diese drei Zahlen addiert, dann bekommst du wieder n heraus. Du weißt somit, dass die Aussage $(k - 1) + k + (k + 1) = k + k + k - 1 + 1 = k + k + k = 3 \cdot k = n$ stimmt.

b) Jede ungerade Zahl lässt sich als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben.

Wenn eine Zahl n ungerade ist, dann kannst du sie schreiben als $n = 2 \cdot k + 1$. Dabei ist k die Zahl, für die dieser Ausdruck stimmt.

Ähnlich wie im Teil a) kannst du den Ausdruck weiter zerlegen: $n = 2 \cdot k + 1 = k + k + 1 = k + (k+1)$

Der Nachfolger von k ist $k + 1$. Das sind zwei benachbarte Zahlen.

c) Teilt man eine Summe der drei Nachbarzahlen durch 3, erhält man die mittlere der drei Nachbarzahlen.

Diese Aussage hast du bereits in a) gezeigt.

Falls es dir schwerfällt, mit Buchstaben statt Zahlen zu arbeiten, kannst du es dir auch nochmal mithilfe eines Zahlenbeispiels klar machen, z.B. ist $2 + 3 + 4 = 9$ und $9 : 3 = 3$.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
13. Interessante Nachbarn



d) Jede Zahl, die durch 6 teilbar ist, lässt sich sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben.

Diese Aussage stimmt schon für die 6 nicht: 6 ist durch 6 teilbar und lässt sich auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben $1 + 2 + 3 = 6$. Aber die 6 lässt sich nicht als Summe von zwei Nachbarzahlen schreiben. Das kannst du ausprobieren: $2 + 3 = 5$ und $3 + 4 = 7$, dazwischen gibt es keine weiteren Möglichkeiten.

Antwortmöglichkeit d) ist also falsch.

Mathematische Exkursion

In der Lösung hast du gesehen, dass sich eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, nicht sowohl als Summe von zwei als auch als Summe von drei Nachbarzahlen schreiben lässt. Allerdings stimmt es, dass sich jede 6. Zahl auf beide Weisen darstellen lässt. Es stimmt für die 3, genauso wie für die 9, die 15, die 21 usw. Es stimmt für jede Zahl, die sowohl durch 3 teilbar ist und die ungerade ist. Und dies ist eben bei jeder 6. Zahl der Fall.

Aber wie sieht es mit Zahlen aus, die sich als Summe von vier Nachbarzahlen schreiben lassen? Oder als Summe von fünf Nachbarzahlen? Haben diese Zahlen auch bestimmte Eigenschaften?

Dafür schauen wir uns zunächst ein Beispiel für eine Summe von vier Nachbarzahlen an. Die kleinste Zahl, die sich als Summe von vier (positiven) Nachbarzahlen schreiben lässt ist:

$$0 + 1 + 2 + 3 = 6.$$

Nun verwenden wir das gleiche Argument, das wir schon in der Lösung verwendet haben: Wir nehmen die erste Nachbarzahl (0) weg und geben die nächste Nachbarzahl (4) dazu. Insgesamt addieren wir also 4 dazu. Die nächste Zahl, die sich als Summe von vier Nachbarzahlen schreiben lässt ist also:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Jede weitere 4. Zahl, begonnen bei der 6, lässt sich damit als Summe von 4 Nachbarzahlen schreiben.

Diese Argumentation können wir jetzt für eine beliebige Summe von Nachbarzahlen führen. Nennen wir die Anzahl der Nachbarzahlen m . Die erste Zahl, die sich als Summe von m Nachbarzahlen schreiben lässt (nennen wir sie n) sieht also so aus:

$$n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (m-1).$$

Jetzt nehmen wir wieder die erste Nachbarzahl (0) weg und geben die nächste Nachbarzahl m dazu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) + m.$$

Diese Zahl ist genau um m größer, als die erste Zahl n . Dies können wir immer so weiter machen. Es lässt sich also jede weitere m -te Zahl als Summe von m Nachbarzahlen schreiben, begonnen bei der ersten Zahl, die man auf diese Weise schreiben kann.

Für die Summe von einer ungeraden Anzahl an Nachbarzahlen gilt immer, dass diese Zahl durch die Anzahl der Nachbarzahlen teilbar ist. Für die Summe von 3 Nachbarzahlen haben wir dies bereits in der Aufgabe festgestellt. Überprüfe diese Behauptung auch für die Summe von 5 (oder 7,9,... usw.) Nachbarzahlen.

Die Statistikabteilung der Wichtelverwaltung hat einen wichtigen Auftrag: Sie versucht jedes Jahr im Sommer abzuschätzen, wie viele Geschenke sich die Kinder wohl dieses Jahr wünschen werden. Umso besser sind die Geschenkewichtel dann vorbereitet, wenn die Wunschzettel aus der ganzen Welt eintreffen.

Für jedes Land haben die Statistikwichtel deshalb Vorhersagen erstellt, wie sich die Kinderzahl wohl entwickeln wird. Pro Jahr werden diese Vorhersagen allerdings nur für wenige Länder aktualisiert. Für Japan haben die Statistikwichtel das letzte Mal im Jahr 1950 eine Vorhersage erstellt. Damals gingen sie von folgenden Werten aus:

- 1950 lebten in Japan ca. 83 Millionen Menschen. Die Wichtel hatten errechnet, dass die Bevölkerung zwischen 1910 und 1950 alle 5 Jahre um etwa 6% gewachsen ist. Sie nahmen an, dass sie nach 1950 genauso weiter wachsen würde.
- Der Anteil der Kinder zwischen 0 und 14 Jahren betrug 1950 in Japan etwa 35%. Auch hier gingen die Wichtel davon aus, dass sich das nicht ändert und dass jedes Kind einen Wunschzettel pro Jahr schreibt.

Im letzten Jahr haben die Wichtel 17 Millionen Wunschzettel aus Japan erhalten.



Wie viele Wunschzettel hätten die Wichtel nach ihrer Vorhersage aus dem Jahr 1950 eigentlich im letzten Jahr erhalten müssen?

- etwa 17 Millionen, so viele wie sie tatsächlich erhalten haben
- etwa 32 Millionen
- etwa 62 Millionen
- etwa 94 Millionen

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das "Mathe im Advent"-Team

Mathe im Leben gemeinnützige GmbH

<http://www.mathe-im-advent.de>

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9
16. Wunschzettel aus Japan



Lösung:

Antwortmöglichkeit c) ist richtig. Die Wichtel hätten 2015 nach ihrer Vorhersage ca. 62 Millionen Wunschzettel erhalten müssen.

Die Wichtel haben zuletzt 1950 eine Vorhersage erstellt. Das ist bereits lange her. In der Zwischenzeit kann viel passiert sein, was die Entwicklung der Bevölkerung beeinflusst hat. Mehr dazu lernst du im Blick über den Tellerrand.

Wie viele Wunschzettel hatten die Wichtel nun für letztes Jahr mit der Vorhersage von 1950 vorausgesagt? Die Vorhersage wurde bereits vor $2015 - 1950 = 65$ Jahren erstellt. Laut der Vorhersage wächst die Bevölkerungszahl alle fünf Jahre um 6 %. Das heißt, die Bevölkerungszahl ist $65 \text{ Jahre} : 5 \text{ Jahre} = 13$ Mal um 6 % gewachsen.

Im Jahr 1950 betrug die Bevölkerungszahl 83 Millionen. Nach fünf Jahren, im Jahr 1955, betrug die Bevölkerungszahl laut der Vorhersage also $83 + 83 \cdot (1 + 0,06) = 83 \cdot 1,06 = 83 \cdot 1,06 \approx 88$ Millionen. Um die Bevölkerungszahl für das Jahr 2015 zu abzuschätzen, musst du diese Rechnung insgesamt 13 Mal durchführen:

$$83 \text{ Millionen} \cdot \underbrace{1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06}_{13\text{-mal}}$$

Das lässt sich kompakt so schreiben:

$$83 \text{ Millionen} \cdot 1,06^{13} \approx 177 \text{ Millionen.}$$

Im Jahr 2015 gäbe es laut der Vorhersage von 1950 etwa 177 Millionen Menschen in Japan. Sie geht zudem von einem Kinderanteil von weiterhin 35% aus. Nach der Vorhersage gäbe es also ungefähr $177 \cdot 35\% = 177 \cdot \frac{35}{100} = 177 \cdot 0,35 \approx 62$ Millionen Kinder in Japan.

Die Wichtel hätten letztes Jahr also eigentlich etwa 62 Millionen Wunschzettel erhalten müssen. Deutlich mehr, als sie tatsächlich erhalten haben.

Blick über den Tellerrand: Vorsicht mit Prognosen

Was ist bei der *Prognose* der Wichtel nun aber so gewaltig schief gegangen? Die Statistikwichtel haben angenommen, dass der Anteil der Kinder sich nicht ändern wird. Dies war eine klare Fehleinschätzung: Die japanische Gesellschaft hat sich in der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts sehr gewandelt. Die Geburtenrate ist in den letzten Jahrzehnten stark gesunken.

Um 1940 gab es in Japan noch über 30 Geburten pro 1000 Einwohner. Bis heute ist die Zahl auf ca. 8 Geburten pro 1000 Einwohner zurückgegangen. Dadurch, dass immer weniger Kinder geboren wurden, hat sich natürlich auch die Rate des Bevölkerungswachstums geändert. Diese ist immer mehr zurückgegangen, bis sie 2008 das erste Mal negativ war. Das heißt, dass die Bevölkerungszahl Japans seit dem nicht einfach nur langsamer wächst, sondern sogar zurückgeht. Durch die niedrigen Geburtenraten ist der Anteil der Kinder zwischen 0-14 Jahren stark zurückgegangen. Von ca. 35 Prozent im Jahr 1950 auf 13 Prozent im Jahr 2015.

Die Wichtel haben sich die Werte für ihre Annahmen auch nicht besonders geschickt ausgewählt. Im Zeitraum zwischen 1910 und 1950 war Japan in viele Kriege verwickelt, die Ausbreitung des Landes änderte sich häufig. Teilweise standen sogar ganz Korea und Teile von China unter japanischer Herrschaft. Nach dem Zweiten Weltkrieg hatte Japan große Teile wieder verloren. Dieser instabile

Hinweise zum Copyright: Die Aufgaben sind geistiges Eigentum der Autoren. Auf den Grafiken liegen ebenfalls Rechte Dritter. Druck und Vervielfältigung der Aufgaben sind ausschließlich in kleinen Stückzahlen für den privaten Gebrauch und in Klassenstärke zur Bearbeitung der Aufgaben in der Schule/als Schulklasse gestattet.



2016: Aufgaben Klasse 7-9

16. Wunschzettel aus Japan

Zeitraum konnte deshalb keine verlässlichen Daten für eine *Hochrechnung* liefern. Es ist also kein Wunder, dass die Wichtel mit ihrer Prognose so daneben lagen. Es ist also kein Wunder, dass die Wichtel mit ihrer Prognose so daneben lagen.

Einer aktuellen Prognose auf der Wikipedia-Seite "Demografie Japans" (https://de.wikipedia.org/wiki/Demografie_Japans) zufolge soll sich die Bevölkerungszahl Japans von aktuell ca. 127 Millionen bis zum Jahr 2100 auf ca. 64 Millionen halbieren. Aber Vorsicht: Auch diese Vorhersage geht von aktuellen Geburten- und Sterberaten aus, die sich – wie wir gelernt haben – über die Jahre drastisch ändern können.

Vorhersagen – auch in anderen Bereichen – solltest du immer mit Vorsicht betrachten. Vor allem wenn es um Aussagen zu Dingen geht, die weit in der Zukunft liegen. Die Geburtenrate wird durch viele Faktoren beeinflusst, zum Beispiel von der wirtschaftlichen Entwicklung eines Landes, von Kriegen, gesellschaftspolitischen Entwicklungen (z.B. des Rentensystems) oder auch von der Bildung der Frauen. Je mehr Faktoren gut analysiert und in das Berechnungsmodell einbezogen werden, umso besser wird die Vorhersage. Es ist allerdings fast unmöglich diese Entwicklungen über einen sehr langen Zeitraum wie 100 Jahre verlässlich vorherzusagen.

In den letzten Wochen vor dem anstrengenden Flug in der Heiligen Nacht werden die Rentiere mit Spezialstroh gefüttert. Das Stroh wird in einem speziellen Stall ausgestreut. In diesem Stall stehen vier Boxen hintereinander, auf die sich die Rentiere beim Fressen aufteilen sollen. Nachdem das Stroh in den Boxen ausgelegt wurde, stürmt die erste Gruppe von 33 Rentieren herbei. Die Rentieroberwichtel Kasimir und Bertrada kennen ihre Schützlinge genau und wissen: Wenn man sie nicht kontrolliert, werden sie alle in die erste Box (vom Eingang aus gesehen) stürmen und sich dort in einem riesigen Durcheinander über das Stroh hermachen.

Deshalb haben sie sich einen kontrollierten Ablaufplan ausgedacht. Die Auszubildenden Ragna und Ottilie helfen bei der Durchführung, denn alleine würden die Rentiere sie einfach überrennen. Der Plan umfasst drei Regeln:

1. Die Rentiere werden einzeln in den Stall gelassen.
2. Wenn in allen Boxen gleich viele Rentiere stehen, darf sich das nächste Rentier aussuchen, in welche Box es geht (gilt insbesondere auch für das erste Rentier).
3. Wenn ungleich viele Rentiere in den vier Boxen stehen, muss das nächste Rentier eine der Boxen wählen, in der am wenigsten Rentiere stehen. Wenn es dafür mehrere Möglichkeiten gibt, muss es die Box wählen, die am weitesten von der zuletzt gewählten entfernt ist.

Vor dem Stall stehen 33 Rentiere. In welche Box muss das letzte Rentier hineingehen, wenn alle Rentiere die Regeln einhalten?



- a) Es kann sich aussuchen, in welche Box es geht.
- b) Es muss in die erste Box gehen.
- c) Es kann zwischen den beiden mittleren Boxen wählen.
- d) Es muss in die letzte Box gehen.



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das „Mathe im Advent“-Team

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

<https://dmv.mathematik.de>



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



Lösung:

Antwortmöglichkeit a) ist richtig. Es kann sich aussuchen, in welche Box es geht.

Du kannst diese Aufgabe mit einer Mischung aus Nachdenken und Rechnen lösen:

Wenn das letzte Rentier an der Reihe ist, bedeutet dies, dass sich bereits 32 der Rentiere in die vier Boxen eingeordnet haben.

Laut Regel 3 darf sich ein Rentier die Box nicht frei aussuchen, wenn es eine ungleiche Anzahl Rentiere in den Boxen gibt. Dies ist der Fall, wenn sich die Anzahl der Rentiere, die sich bereits in einer Box befinden nicht durch vier teilen lässt, denn da es vier Boxen gibt, ist die Anzahl der Rentiere, die sich in diesen befinden durch vier teilbar, wenn in jeder Box gleich viele Rentiere sind.

Wenn also Regel 3 immer befolgt wird, befinden sich in den Boxen immer die gleiche Anzahl Rentiere, wenn sich die Gesamtanzahl der Rentiere, die bereits im Stall sind, durch 4 teilen lässt.

Wenn das letzte Rentier an der Reihe ist, befinden sich 32 Rentiere in den Boxen. Die Zahl 32 lässt sich glatt durch 4 teilen. Somit befindet sich in jeder Box die gleiche Anzahl Rentiere und das letzte Rentier darf sich nach der 2. Regel frei aussuchen in welche der vier Boxen es geht.

Also ist Antwortmöglichkeit a) die richtige Antwort.

Blick über den Tellerrand

Das Schubfachprinzip ist ein einfaches, aber auch sehr wichtiges Beweisprinzip aus der Mathematik. Mit diesem Prinzip lassen sich gewisse Aussagen über endliche Mengen beweisen.

Der Name des Schubfachprinzips kommt von einer bildhaften Vorstellung, die das Prinzip sehr gut erklärt: Stell dir vor, du hast eine bestimmte Anzahl von Schubfächern und du legst mehr Objekte in die Fächer, als Fächer vorhanden sind, dann befindet sich in mindestens einem der Fächer, mindestens zwei Objekte.

Geschichtlich stammt das Schubfachprinzip von dem Mathematiker *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859). Er soll es zumindest erstmals benannt haben. Er betrachtete dabei die möglichen Eigenschaften als Schubfächer, in die Dinge dann gelegt wurden. Sind nun mehr Dinge als Schubfächer auf die Schubfächer verteilt worden, so müssen schlussendlich, in einer Schublade mindestens zwei Dinge vorhanden sein.

Heute ist dieses Prinzip auch als Taubenschlagprinzip bekannt. Die Argumentation ist die gleiche: Wenn mehr als n Tauben auf n Taubenschläge verteilt werden, so sind in einem Schlag mindestens zwei Tauben. Du weißt nur nicht, in welchem Taubenschlag sie sind und auch nicht, wie viele Tauben dort drin sind.

Daraus bildet sich folgende mathematische Definition: m und n stehen für eine beliebige natürliche Zahl >1 .

"Ordnet man m Elementen n Eigenschaften zu, wobei $n < m$ ist, so gibt es eine Eigenschaft, die von mindestens zwei Elementen angenommen wird."



2015: Aufgaben Klasse 7-9
7. Wehe, wenn sie losgelassen



ODER

"Ordnet man $n + 1$ oder mehr Elementen n Eigenschaften zu, so gibt es eine Eigenschaft, die von mindestens zwei Elementen angenommen wird."

Und ein wenig einfacher formuliert:

"Werden m Objekte in n Kategorien eingeteilt, wobei $n < m$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält."

Dazu ein paar Beispiele:

1. Einer Gruppe von vier Kindern werden fünf Kaugummis geschenkt. Diese fünf Kaugummis werden an die vier Kinder verteilt (ohne, dass ein Kaugummi zerteilt wird). So gibt es ein Kind, das mehr als einen Kaugummi bekommt. (Kaugummi = Objekte; Kinder = Kategorien/Fächer)
2. Unter 13 Personen haben mindestens 2 im selben Monat Geburtstag. (Personen = Objekte; Monate = Kategorien/Fächer). Auch wenn jeder der ersten 12 Personen einem der 12 Monate zugeordnet wird, muss die 13. Person einem Monat zugeordnet werden (in diesem Fall in diesem Geburtstag haben), in dem schon eine andere Person ist. Und auch, wenn alle der 13 Personen im gleich Monat Geburtstag hätten, wäre das Prinzip erfüllt, da mehr als zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.
3. Von 11 natürlichen Zahlen enden mindestens zwei auf die gleiche Ziffer, weil es nur 10 verschiedene Ziffern gibt und dann mindestens eine mindestens doppelt vorkommen muss.
4. Bei einem Memoryspiel gibt es 32 Paare. Wie viele Karten musst du herausnehmen, um sicher ein Paar zu haben? Nach dem Schubfachprinzip gibt es 32 verschiedene Motive: Motiv-1, Motiv-2, ..., bis Motiv-32. Wählst du aus dem Stapel 33 Karten aus, so ist mindestens in einem der Schubfächer ein Paar vorhanden.

Dieses Prinzip kommt dir wahrscheinlich selbstverständlich und vollkommen selbsterklärend vor, trotzdem hilft es bestimmte mathematische Sachverhalte zu beweisen. Die Argumentation eines Beweises nach dem Schubfachprinzip funktioniert in der Regel indirekt über einen Widerspruch:

Falls das Schubfachprinzip nicht stimmt, landet in jedem Schubfach höchstens ein Objekt. Somit kann es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer geben, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass es nämlich mehr Objekte als Schubfächer gibt.